Домашна работа 1 по Алгебра 1. 2 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

2 Въпрос В пространството F^4 на наредените четворки с елементи от поле F са дадени векторите

$$a_1 = (-1, 2, 1, 1),\ a_2 = (3, -1, 2, 2),\ a_3 = (4, 1, -1, 2),$$
$$a_4 = (1, -3, 2, 1),\ a_5 = (1, 3, 4, 4),\ a_6 = (-1, 7, -4, 0).$$

Да се намери базис на F^4, който се съдържа в множеството $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$.

Решение: Дадените вектори образуват следната матрица от коефициенти:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ -1 & 7 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Събираме първия ред с четвърти и пети,
умножаваме първия с -1 и го събираме с шести ред,
умножаваме първия с 3 и го събираме с втори ред,
умножаваме първия с 4 и го събираме с трети ред.

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Умножаваме петия ред с -1 и го събираме с втори и шести.
Делим пети ред на 5 и трети ред на 3.
Събираме резултатния пети ред с четвърти,
умножаваме пети ред с -1 и го събираме с първия.

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -6 \end{pmatrix}$$

Делим шести ред на 2.
Събираме резултатния шести ред с четвърти.
Умножаваме пети ред с -3 и събираме с трети.

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Умножаваме четвърти ред с -2 и събираме с трети,
събираме четвърти ред с пети,
умножаваме четвърти с -5 и събираме с шести.

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Умножаваме трети ред с -3 и събираме с шести.
Събираме трети ред с пети.
Умножаваме пети ред с -1 и събраме с първи.
Умножаваме с -1 първи, трети и четвърти ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

След размяна на втори с пети и трети с четвърти и след премахване на последните два нулеви реда, получаваме матрица в Гаус-Жорданов вид.

$\Longrightarrow$ a_1, a_3, a_4, a_5 са линейно независими вектори

$\dim\left(F^4\right) = 4$, следователно всеки базис на F^4 е съставен от четири линейно незаивисми вектора и от $a_1, a_3, a_4, a_5 \in \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, следва че (a_1, a_3, a_4, a_5) е базис на F^4